EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2008

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *les deux points* $A(0,-1,1)$ *et* $B(1,-1,0)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0.$$

1,25 **1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,0,2)$ *et que son rayon est* $\sqrt{3}$ *et vérifier que A appartient à* (S).

1,25 **2.** *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ *et montrer que* $x+y+z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OAB).

0,5 **3.** *Montrer que le plan* (OAB) *est tangent à la sphère* (S) *au point A.*

Exercice 2 : (3 points)

1 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2-6z+34=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, *les points A, B et C d'affixes respectives :*

$$a=3+5i\ ,\ b=3-5i\ \text{ et }\ c=7+3i\ .$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la translation T de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $4-2i$.

0,75 **a)** *Montrer que :* $z'=z+4-2i$ *et vérifier que le point C est l'image du point A par la translation T.*

0,5 **b)** *Montrer que :* $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.

0,75 **c)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle et que* $BC=2AC$.

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1. *On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.*

1 **a)** *Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.*

1 **b)** *Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est* $\dfrac{16}{21}$.

1 **2.** *On considère dans cette question l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.*
Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

Problème : (11 points)

I- *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x-2\ln x\ .$$

0,5	1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.
0,5	b) Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.
0,5	2. En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. (remarquer que $g(2)>0$)
	II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75	1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter géométriquement ce résultat.
0,5	2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$. (on pourra poser $t=\sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$)
0,75	b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (remarquer que : $f(x)=x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$)
0,5	c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$.
0,5	d) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ).
0,75	3. a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
0,25	b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
0,5	c) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
0,5	4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (on admet que $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$).
1	5. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (on admet que $I(e,e-1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra

$e \approx 2,7$).

0,5 **6. a)** *Montrer que* $H : x \mapsto x \ln x - x$ *est une fonction primitive de la fonction* $\ln : x \mapsto \ln x$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis montrer que :* $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

0,75 **b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.

0,5 **c)** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C)*, la droite* (Δ) *et les deux droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.

III- *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :*

$u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,75 **1.** *Montrer que* $1 \leq u_n \leq 2$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II-3. a)**).

0,5 **2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

0,75 **3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*