EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2009

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overline{MA}.\overline{MB}=0$.

0,75 **1.** *Déterminer les coordonnées du vecteur $\overline{OC}\wedge\overline{OD}$ et en déduire que $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (OCD).*

0,5 **2.** *Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6.*

0,5 **3. a)** *Calculer la distance du point Ω au plan (OCD).*

0,5 **b)** *En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S).*

0,75 **c)** *Vérifier que : $\overline{OA}.\overline{OB}=0$ puis en déduire que O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD).*

Exercice 2 : (3 points)

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=2-2i,\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \text{ et } c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i .$$

1 **1.** *Ecrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b*

2. *On considère la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.*

0,75 **a)** *Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R.*
Montrer que : $z'=bz$.

0,5 **b)** *Vérifier que le pont C est l'image du point A par la rotation R.*

0,75 **3.** *Montrer que : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\,[2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c.*

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher).
On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1,5 **1.** *On considère les deux événements suivants :*
A :" tirer trois boules de même couleur ".
B :" tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux ".
Montrer que : $p(A)=\frac{3}{44}$ et $p(B)=\frac{3}{11}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.*

0,25 1,25	**a)** *Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.* **b)** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique* $E(X)$.
	Exercice 4 : (2 points) *On pose :* $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx$ *et* $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx$.
0,25	**1.a)** *Vérifier que :* $\frac{x}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$ *pour tout réel x différent de* -3.
0,75	**b)** *Montrer que :* $I=1-3\ln 2$.
1	**2.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $J=-I$.
	Problème : (9 points) *On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :* $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$. (C) *désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,75	**I) 1.** *Vérifier que :* $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est* $\mathbb{R}$ *et que :* $(\forall x\in\mathbb{R}),\ 1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$.
0,75	**2.** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *puis montrer que :* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ *et interpréter géométriquement ce résultat.*
1	**3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *et vérifier que* $f'(0)=0$.
1	**b)** *Etudier le signe de* $\sqrt{e^x}-1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]-\infty,0]$.
0,25	**4.a)** *Vérifier que :* $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$.
0,5	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=2x$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.
0,25	**5.a)** *Vérifier que :* $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5	**b)** *Etudier le signe de* $\sqrt{e^x}-2$ *et* $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *En déduire que :* $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,\ln 4]$.
0,5	**d)** *Montrer que :* $f(x)\leq x$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,\ln 4]$.
0,75	**6.** *Construire la courbe* (C).
	(on admettra que la courbe (C) *possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à* -1 *et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra* $\ln 4\simeq 1,4$*).*
	II) *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*
	$u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
	On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f.
0,75	**1.** *Montrer que :* $0\leq u_n\leq\ln 4$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,75	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
1	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*