EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2014

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *les points* $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ *et* $C(0,5,0)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0.$$

0,75 **1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ *et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*

0,5 **b)** *Montrer que* $2x-y-2z+5=0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC)

0,5 **2. a)** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(2,0,0)$ *et son rayon est 3.*

0,75 **b)** *Montrer que le plan* (ABC) *est tangent à la sphère* (S).

0,5 **c)** *Déterminer le triplet de coordonnées de H point de contact du plan* (ABC) *et la sphère* (S).

Exercice 2 : (3 points)

0,75 **1.** *Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :*

$$z^2-z\sqrt{2}+2=0$$

2. *On considère le nombre complexe :* $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$.

0,5 **a)** *Montrer que le module de u est* $\sqrt{2}$ *et que* $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

0,75 **b)** *En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que* u^6 *est un nombre réel.*

3. *On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, *les deux points A et B d'affixes respectives a et b tel que :* $a=4-4\sqrt{3}i$ *et* $b=8$.
Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' *l'affixe du point* M' *image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

0,5 **a)** *Exprimer* z' *en fonction de z.*

0,5 **b)** *Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.*

Exercice 3 : (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :*

$$u_0=13 \text{ et } u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 **1.** *Montrer par récurrence que* $u_n<14$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *Soit* (v_n) *la suite numérique telle que :* $v_n=14-u_n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1	**a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et exprimer* v_n *en fonction de n.*
0,75	**b)** *En déduire que* $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis calculer la limite de la suite* (u_n).
0,5	**c)** *Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle* $u_n > 13{,}99$.
	Exercice 4 : (3 *points*) *Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portants les nombres :* 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1.
1	**1.** *On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac.* *Soit A l'événement : " La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1"* *Montrer que* $p(A) = \frac{5}{9}$.
	2. *On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1.*
1	**a)** *Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est* $\frac{1}{6}$.
1	**b)** *Saïd a joué le jeu précédent trois fois (Saïd remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac).* *Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois.*
	Problème : (8 *points*) **I)** *Soit g la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.
0,5	**1.** *Montrer que* $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$ *et en déduire que la fonction g est croissante sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**2.** *Vérifier que* $g(1) = 0$ *puis en déduire que* $g(x) \leq 0$ *pour tout x de* $]0,1]$ *et que* $g(x) \geq 0$ *pour tout x de* $[1,+\infty[$.
	II) *On considère la fonction numérique f définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$. *et soit* (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité 1cm).*

0,5 **1.** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*

0,25 **2. a)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 **b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ *(on pourra poser* $t=\sqrt{x}$*) puis montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

0,25 **c)** *Déterminer la branche infinie de la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

1,5 **3.a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$ *puis en déduire que la fonction f est décroissante sur* $]0,1]$ *et croissante sur* $[1,+\infty[$.

1 **b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis en déduire que* $f(x)\geq 2$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$.

0,75 **4.** *Construire* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(on admettra que la courbe* (C) *possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer).*

5. *On considère les deux intégrales I et J suivantes :*

$$I=\int_1^e(1+\ln x)dx \quad \text{et} \quad J=\int_1^e(1+\ln x)^2\,dx.$$

0,5 **a)** *Montrer que* $H:x\mapsto x\ln x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h:x\mapsto 1+\ln x$ *sur* $]0,+\infty[$ *puis en déduire que* $I=e$.

0,5 **b)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $J=2e-1$.

0,5 **c)** *Calculer, en* cm^2*, l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C) *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.