EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2015

SUJET FUITÉ · BONUS

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

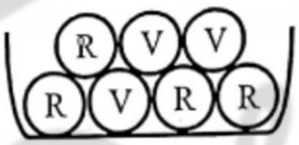
PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *les points deux points* $A(2,1,0)$ *et* $B(-4,1,0)$.
0,5	**1.** *Soit* (P) *le plan passant par le point A et* $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *est un vecteur qui lui est normal.* *Montrer que* $x+y-z-3=0$ *est une équation cartésienne du plan* (P).
0,75	**2.** *Soit* (S) *l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation :* $\overline{MA}.\overline{MB}=0$. *Montrer que* (S) *est la sphère de centre* $\Omega(-1,1,0)$ *et de rayon* 3.
0,5	**3. a)** *Calculer la distance du point* Ω *du plan* (P) *et en déduire que* (P) *coupe* (S) *suivant un cercle* (C).
0,5	**b)** *Montrer que le centre du cercle est le point* $H(0,2,-1)$.
0,75	**4.** *Montrer que* $\overline{OH}\wedge\overline{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ *et en déduire l'aire du triangle OHB.*
	Exercice 2 : (3 *points*)
	I- *On considère le nombre complexe a tel que :* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
0,5	**1.** *Montrer que le module du nombre complexe a est* $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
0,25	**2.** *Vérifier que* $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$.
0,25	**3. a)** *En linéarisant* $\cos^2\theta$, θ *est un nombre réel, montrer que :* $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$.
0,5	**b)** *Montrer que* $a=4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$. *(on rappelle que* $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$*)*
0,5	**c)** *Montrer que* $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ *est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que* $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$
	II- *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, *les deux points* Ω *et A d'affixes respectives* ω *et a tels que :* $\omega=\sqrt{2}$ *et* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ *et la rotation R de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
0,5	**1.** *Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est* $2i$.
0,5	**2.** *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que* $\lvert z-2i\rvert=2$.

Exercice 3 : (3 points)

Une urne U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).
Une autre urne U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

L'urne U_1 

L'urne U_2 

2 **I)** *On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne U_1.*
Soit l'événement A :"On tire une seule boule rouge et deux vertes" et l'événement B :" On tire trois boules de même couleur".
Montrer que $p(A)=\frac{12}{35}$ *et* $p(B)=\frac{1}{7}$.

1 **II)** *On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2.*
Soit l'événement C :"On tire trois boules rouges".
Montrer que $p(C)=\frac{6}{35}$.

Problème : (11 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2cm).

0,5 **I) 1.** *Montrer que* $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ *(D_f est l'ensemble de définition de la fonction f).*

0,75 **2. a)** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ *puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.*

0,5 **b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.*

0,5 **c)** *Montrer que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et donner une interprétation géométrique à ce résultat (pour calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$*; remarquer que* $x(1-\ln x)=x-x\ln x$).

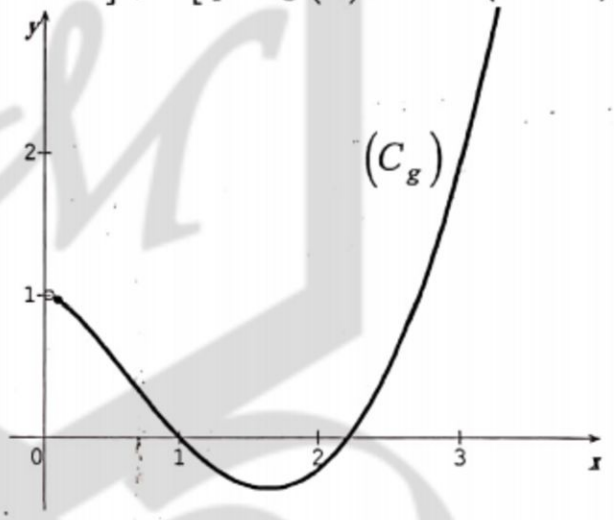
0,75 **3. a)** *Montrer que* $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ *pour tout* x *de* D_f.

1 **b)** *Montrer que la fonction* f *est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et croissante sur chacun des deux intervalles* $[1,e[$ *et* $]e,+\infty[$.

0,25 **c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction* f *sur* D_f.

II) *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par:* $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$.

et soit (C_g) *la courbe représentative de la fonction* g *dans un repère orthonormé (voir figure).*



0,5 **1. a)** *Déterminer graphiquement le nombre de solution (s) de l'équation* (E) *suivante :*

$g(x)=0$, $x\in]0,+\infty[$.

0,5 **b)** *On donne le tableau de valeurs suivant :*

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	−0,14	−0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) *admet une solution* α *telle que :* $2,2<\alpha<2,3$.

0,25 **2. a)** *Vérifier que* $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ *pour tout* x *de* D_f.

0,5 **b)** *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$ *coupe la courbe* (C_f) *aux deux points d'abscisses* 1 *et* α.

0,5 **c)** *Déterminer, à partir de* (C_g), *le signe de la fonction* g *sur l'intervalle* $[1,\alpha]$ *et montrer que* $f(x)-x\leq 0$ *pour tout* x *de* $[1,\alpha]$.

1,25 **3.** *Tracer, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (Δ) *et la courbe* (C_f).

0,75 **4. a)** *Montrer que* $\int_1^{\sqrt{e}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$.

(*remarquer que :* $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ *pour tout* x *de* D_f)

0,75 **b)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C_f), *la*