EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2015

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le plan (P) d'équation $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0,75 **1. a)** *Calculer la distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).*

0,5 **b)** *Vérifier que le point $H(0,-2,-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S).*

2. *On considère les deux points $A(2,1,1)$ et $B(1,0,1)$.*

0,75 **a)** *Vérifier que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).*

0,5 **b)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB).*

0,5 **c)** *Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).*

Exercice 2 : (3 points)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :*

$$z^2+10z+26=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que :*

$$a=-2+2i\ ,\ b=-5+i\ ,c=-5-i\ \text{et}\ \omega=-3.$$

0,5 **a)** *Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$.*

0,5 **b)** *En déduire la nature du triangle ΩAB.*

3. *Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$.*

0,5 **a)** *Montrer que l'affixe d du point D est $1+3i$.*

0,75 **b)** *Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.*

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1,5 **1.** *On considère l'événement A suivant :" tirer une boule blanche au moins".*

et l'événement B suivant :" tirer deux boules de même couleur".

Montrer que $p(A)=\frac{13}{28}$ et $p(B)=\frac{1}{4}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées.

0,5 **a)** Montrer que $p(X=2)=\frac{1}{28}$.

1 **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Problème : (11 points)

I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-2x$.

0,75 **1.** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty,\ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

0,5 **2.** Vérifier que $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

0,5 **3.** En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{e^x-2x}$.

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm).

1 **1. a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$.

(remarquer que $e^x-2x=x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0,5 **b)** Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

0,75 **2. a)** Montrer que $f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,75 **b)** Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0,25 **c)** Montrer que $y=x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

1 **3.** Tracer, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).

(on prendra $\frac{1}{e-2}\approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0,1[$ et l'abscisse de

l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$).

0,75 **4. a)** *Montrer que* $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ *pour tout x de l'intervalle* $[0,+\infty[$.

0,75 **b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$.

0,5 **c)** *Soit, en* cm^2, $A(E)$ *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *l'axe des abscisses et les deux droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$.

Montrer que : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

III- *Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]-\infty,0]$ *par :*

$$h(x) = f(x).$$

0,5 **1.** *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque* h^{-1} *définie sur un intervalle J que l'on précisera.*

0,5 **2.** *Tracer, dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$, *la courbe* $(C_{h^{-1}})$ *représentative de la fonction* h^{-1}.

IV- *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = h(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,5 **1.** *Montrer par récurrence que* $u_n \leq 0$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,75 **2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ *pour tout x de l'intervalle* $]-\infty,0]$).

0,75 **3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*