EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2016

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0,75 **1.** *Vérifier que :* $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis montrer par récurrence que* $u_n < 3$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

2. *Soit* (v_n) *la suite numérique définie par :* $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,75 **a)** *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et en déduire que* $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

0,5 **b)** *Montrer que* $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *puis exprimer* u_n *en fonction de n.*

0,5 **c)** *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 2 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *les points* $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ *et* $C(2,2,1)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0.$$

0,5 **1. a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 **b)** *En déduire que* $2x + 2y + z - 9 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,5 **2. a)** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,-1,0)$ *et son rayon est 6.*

0,5 **b)** *Montrer que* $d(\Omega,(ABC)) = 3$ *et en déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle* (Γ).

0,5 **3. a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point* Ω *et orthogonale au plan* (ABC).

0,5 **b)** *Montrer que le centre du cercle* (Γ) *est le point B.*

Exercice 3 : (3 points)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2 - 4z + 29 = 0.$$

	2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, *les points* Ω, A *et* B *d'affixes respectives* ω, a *et* b *tels que :* $\omega = 2+5i$, $a = 5+2i$ *et* $b = 5+8i$.
0,75	**a)** *Soit* u *le nombre complexe tel que :* $u = b-\omega$. *Vérifier que* $u = 3+3i$ *puis montrer que* $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
0,25	**b)** *Déterminer un argument du nombre complexe* $\bar{u}$. ($\bar{u}$ *désigne le conjugué du nombre complexe* u)
0,75	**c)** *Vérifier que* $a-\omega = \bar{u}$ *puis en déduire que :* $\Omega A = \Omega B$ *et* $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
0,5	**d)** *On considère la rotation* R *de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *Déterminer l'image du point* A *par la rotation* R.
	Exercice 4 : (3 *points*) *Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.*
1	**1.** *Soit l'événement* A *:" les deux boules tirées sont rouges".* *Montrer que* $p(A) = \frac{2}{15}$.
	2. *Soit* X *la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.*
0,5	**a)** *Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* X *est* $\{2,3,4\}$.
1,5	**b)** *Montrer que* $p(X=3) = \frac{8}{15}$ *puis déterminer la loi de probabilité de* X.
	Problème : (8,5 *points*) *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 2x-2+e^{2x}-4e^{x}$. *et soit* (C_f) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité :1cm).*
0,25	**I) 1. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
0,5	**b)** *Montrer que la droite* (D) *d'équation* $y = 2x-2$ *est une asymptote à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

0,5 **2. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,5 **b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

0,5 **3. a)** *Montrer que* $f'(x)=2\left(e^x-1\right)^2$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,25 **b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur* $\mathbb{R}$.
(remarquer que $f'(0)=0$*).*

0,75 **c)** *Montrer qu'il existe un unique réel* α *de l'intervalle* $]1,\ln 4[$ *tel que :* $f(\alpha)=0$.

0,5 **4. a)** *Montrer que la courbe* (C_f) *est au-dessus de la droite* (D) *sur l'intervalle* $]\ln 4,+\infty[$ *et qu'elle est en-dessous de la droite* (D) *sur l'intervalle* $]-\infty,\ln 4[$.

0,5 **b)** *Montrer que la courbe* (C_f) *admet un seul point d'inflexion de coordonnées* $(0,-5)$.

0,75 **c)** *Tracer la droite* (D) *et la courbe* (C_f) *dans le même repère* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
(on prendra $\ln 4\approx 1,4$ *et* $\alpha\approx 1,3$*).*

0,5 **5. a)** *Montrer que* $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=-\dfrac{9}{2}$.

0,5 **b)** *Calculer, en* cm^2*, l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C_f)*, la droite* (D)*, l'axe des ordonnées et la droite d'équation* $x=\ln 4$.

0,5 **II) 1. a)** *Résoudre l'équation différentielle* $(E): y''-3y'+2y=0$.

0,5 **b)** *Déterminer la solution g de l'équation* (E) *qui vérifie les deux conditions :* $g(0)=-3$ *et* $g'(0)=-2$.

2. *Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]\ln 4,+\infty[$ *par :*
$$h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^x\right).$$

0,75 **a)** *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque* h^{-1} *et que* h^{-1} *est définie sur* $\mathbb{R}$.

0,75 **b)** *Vérifier que* $h(\ln 5)=\ln 5$ *puis déterminer* $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$.