EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2017

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0,5 **1.a)** *Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).*

0,75 **b)** *Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1,1,0)$ est le point de contact.*

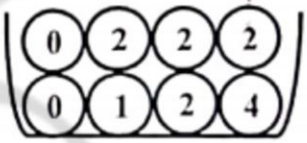
0,25 **2.a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).*

0,75 **b)** *Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$.*

0,75 **3.** *Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB.*

Exercice 2 : (3 points)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1,5 **1.** *Soit A l'événement :*

« Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0»

et B l'événement :

« Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8»

Montrer que $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$.

2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.*

0,5 **a)** *Montrer que $p(X = 16) = \frac{3}{28}$*

1 **b)** *Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

Exercice 3 : (3 points)

On considère les nombres complexes a et b tels que :

$$a = \sqrt{3} + i \text{ et } b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i .$$

0,25 **1.a)** *Vérifier que $b = (1+i)a$.*

0,5 **b)** *En déduire que $|b| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.*

0,5 **c)** *Déduire de ce qui précède que* $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c=-1+i\sqrt{3}$.

0,75 **a)** *Vérifier que* $c=ia$ *et en déduire que* $OA=OC$ *et que* $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

0,5 **b)** *Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur* $\overrightarrow{OC}$.

0,5 **c)** *En déduire que le quadrilatère OABC est un carré.*

Problème : (11 *points*)

I) *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x\ .$$

0,25 **1.** *Vérifier que:* $g(1)=0$.

1 **2.** *A partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :*

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Montrer que $g(x)\le 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,1]$ *et que* $g(x)\ge 0$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[1,+\infty[$.

II) *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\ .$$

Soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité :1cm).*

0,5 **1.** *Montrer que :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

0,25 **2.a)** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,75 **b)** *Montrer que la courbe* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite* (D) *d'équation* $y=x$.

1 **3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $]0,+\infty[$.

0,75 **b)** *Montrer que f est décroissante sur l'intervalle* $]0,1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

0,25	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**4.a)** *Résoudre dans l'intervalle* $]0,+\infty[$ *l'équation :* $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$.
0,5	**b)** *En déduire que la courbe* (C) *coupe la droite* (D) *en deux points dont on déterminera les coordonnées.*
0,75	**c)** *Montrer que* $f(x) \leq x$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[1,2]$ *et en déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (D) *sur l'intervalle* $[1,2]$.
1	**5.** *Construire, dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la droite* (D) *et la courbe* (C) *(on admettra que la courbe* (C) *possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre* 2,4 *et* 2,5).
0,5	**6.a)** *Montrer que :* $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.
0,25	**b)** *Montrer que la fonction* $H : x \mapsto 2\ln x - x$ *est une fonction primitive de la fonction* $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**c)** *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\, dx = (1-\ln 2)^2$.
0,5	**d)** *Calculer, en* cm^2, *l'aire du domaine plan limité par la courbe* (C), *la droite* (D) *et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = 2$.
	III) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = \sqrt{3}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout entier naturel n.*
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $1 \leq u_n \leq 2$ *pour tout entier naturel n.*
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question* **II) 4. c)**).
0,75	**3.** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

Instagram Prof. Belbacha