EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2019

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(0;-2;1)$ et $C(1;-2;0)$.

0,75 **1.a)** *Montrer que* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

0,5 **b)** *En déduire que* $x + y + z + 1 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

0,75 **2.** *Soit* (S) *la sphère d'équation :* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) *est* $\Omega(2;-1;1)$ *et que son rayon est* $R = \sqrt{5}$.

0,5 **3. a)** *Calculer* $d(\Omega;(ABC))$ *la distance du point* Ω *au plan* (ABC).

0,5 **b)** *En déduire que le plan* (ABC) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle* (Γ).
(la détermination du centre et du rayon de (Γ) *n'est pas demandée)*

Exercice 2 : (3 points)

0,75 **1.** *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

2. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :*

$$a = 1 - i\sqrt{3},\ b = 2 + 2i,\ c = \sqrt{3} + i \text{ et } d = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

0,5 **a)** *Vérifier que :* $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

0,25 **b)** *En déduire que les points A, C et D sont alignés.*

0,5 **3.** *On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle* $\frac{-\pi}{3}$.

Vérifier que : $z' = \frac{1}{2}\alpha z$.

4. *Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que* $p = a - c$.

0,5 **a)** *Vérifier que :* $h = ip$.

0,5 **b)** *Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.*

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
On considère les événements suivants :
A : « Obtenir trois boules vertes. »

	B : « *Obtenir trois boules de même couleur.* » C : « *Obtenir au moins deux boules de même couleur.* »
2	**1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{120}$ *et* $p(B)=\frac{7}{40}$.
1	**2.** *Calculer* $p(C)$.
	Problème : (11 *points*) **Première partie :** *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2 .$$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité:1 cm).*
0,5	**1.** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *puis interpréter le résultat géométriquement.*
0,25	**2. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.
0,5	**b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
0,5	**c)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ *puis en déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.
0,75	**d)** *Montrer que* (C) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.
0,5	**3. a)** *Vérifier que pour tout x de* $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ *et que pour tout x de* $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$.
1	**b)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$.
0,5	**c)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**4. a)** *Montrer que* $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$.
0,5	**b)** *En déduire que* (C) *admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*
0,5	**5. a)** *Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ *et déduire la position relative de* (C) *et* (Δ).

1	**b)** *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
0,5	**6. a)** *Montrer que la fonction* $H : x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $h : x \mapsto \ln x$ *sur* $]0;+\infty[$.
0,75	**b)** *A l'aide d'une intégration par parties montrer que* $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e-2$.
0,5	**c)** *Calculer en* cm^2 *l'aire du domaine plan limité par* (C) *et* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$.
	Deuxième partie :
	Soit (u_n) *la suite numérique définie par :* $u_0=1$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.a)** *Montrer par récurrence que* $1\le u_n\le e$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
0,5	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente .*
0,75	**2.** *Calculer la limite de la suite* (u_n).