EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2020

SESSION NORMALE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de IN

0.25 1) Calculer u_1

0.5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $u_n>0$

1 3)a) Montrer que pour tout n de IN, $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout n de IN, $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0.5 b) Calculer $\lim u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de IN.

0.75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

1 b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de IN.

Exercice 2 : (5 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$(E)\ :\ z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0$

0.5 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

1 b) En déduire les solutions de l'équation (E).

2) Soient les nombres complexes $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

0.75 a) Vérifier que $b\overline{c}=a$, puis en déduire que $ac=4b$

0.5 b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

0.5 c) En déduire que $a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d=a^4$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

0.5 a) Vérifier que $z'=\frac{1}{4}az$

0.25 b) Déterminer l'image du point C par la rotation R

0.25 c) Déterminer la nature du triangle OBC.

0.75 d) Montrer que $a^4=128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

0.5 1)a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 b) Montrer que g est croissante sur $[1,+\infty[$

0.5 c) en déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\le \ln x\le 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x}$)

1 d) Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\le \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 2) a) Montrer que la fonction $G: x\mapsto x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$

0.75 b) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x)dx$

Problème : (7 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité : 2cm)

0.5 1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

0.5 2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x+\dfrac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 b) Résoudre l'équation $e^{x-2}-4=0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty,2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4,+\infty[$

0.5 3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.5 4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

0.25 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.75 5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C)

0.5 6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

1 7) Construire (Δ) et (C) dans le repère $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ ci-dessous (on prend $\ln 2\approx 0,7$ et $\ln 3\approx 1,1$)

0.5 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0.75 b) Construire dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

0.5 c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)