EXAMEN NATIONAL DU BACCALAURÉAT · MATHÉMATIQUES

2023

SESSION DE RATTRAPAGE

2e année Bac · Sciences Physiques & SVT · Option française · Durée : 3 h

MON SUIVI

☐ Sujet traité

Le : _____

Durée : _____

Note : _____ / 20

PR. BELBACHA

Conditions réelles : 3 heures, calculatrice non programmable, sans cours.

RECUEIL COMPLET 2008 → 2026 + CORRIGÉS
profbelbacha.netlify.app/nationaux
Instagram @prof.belbacha · TikTok @prof.belbacha.math

Exercice 1 (3points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

0.5 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente.

3) On pose $v_n = \frac{3}{1+u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

0.5 b) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de (u_n)

4) On pose $w_n = e^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

0.5 b) Calculer la limite de la somme S_n

Exercice 2 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

0.5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

0.25 b) Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 c) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

0.5 a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

0.5 b) Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0.25 a) Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

0.5 b) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 3 (3points)

1) On considère le nombre complexe $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

0.25 a) Montrer que $a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

0.25 b) Déduire que a^{2022} est un nombre réel.

0.5 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et $\overline{a}$

Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha): z^2-\sqrt{3}z+\alpha=0$ où α est un nombre réel non nul.

On suppose que l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et $\overline{z}$

Soient les points $M(z)$; $N(\overline{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe.

Sans résoudre l'équation (E_α) :

0.5 a) Justifier que $\alpha>\frac{3}{4}$ et que $\alpha=z\overline{z}$

0.5 b) Montrer que $|z|=|z-\sqrt{3}|$

0.5 c) En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

0.5 d) Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et déduire dans ce cas, les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Exercice 4 (3points) :

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

0.5 a) Calculer la probabilité de l'événement A : " tirer au moins une boule noire".

0.5 b) Soit l'événement B : "Obtenir deux boules de même couleur". Montrer que $p(B)=\frac{7}{15}$

0.5 c) On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage.

Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois.

2) Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.

0.25 a) Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3

0.25 b) Montrer que $p(X=2)=\frac{4}{15}$

0.5 c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Problème (*8 points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\le 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$

0.5 c) Résoudre dans l'intervalle $]2,+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2)\le 0$

0.75 d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

1 5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

(On donne : $f(3)=1$; $2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)

6) Soit $\lambda\in]2,3[$

0.5 a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_\lambda^3 (x-2)^2\ln(x-2)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

0.5 b) Déduire en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations: $y=1$, $x=\lambda$ et $x=3$

0.25 c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 2^+} A(\lambda)$